ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora (Tema 1) | Segundo cuatrimestre – 2019

Duración: 3 horas. | 26/II/20 – 14:00 hs.

Aclaración. En lo que sigue se presentan algunas de las posibles resoluciones de los problemas correspondientes a esta evaluación integradora. Es posible que se haya cometido algún error material involuntario, en tal caso se solicita del lector que lo corrija y que siga adelante.

---

1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. **Demostrar** que $\mathbb{V} = \operatorname{Im}(T) \oplus \operatorname{Nu}(T)$.

Resolución. [Referencia: ejercicio 20 - Práctica 2.]

Decir que $T \circ T = T$ es equivalente a decir que $T \circ (I_{\mathbb{V}} - T) = 0_{\mathbb{V}}$, de donde resulta que

$$\operatorname{Im}(I_{\mathbb{V}} - T) \subseteq \operatorname{Nu}(T). \tag{1}$$

Observando que todo $v \in \mathbb{V}$ se puede escribir en la forma $v = T(v) + (v - T(v))$ se deduce que

$$\mathbb{V} = \operatorname{Im}(T) + \operatorname{Nu}(T) \tag{2}$$

porque donde $T(v) \in \operatorname{Im}(T)$ y, de acuerdo con (1), $v - T(v) \in \operatorname{Nu}(T)$.

Si $w \in \operatorname{Im}(T)$, esto significa que existe un $v \in \mathbb{V}$ tal que $w = T(v)$. Entonces $T(w) = T(T(v)) = T(v) = w$ porque $T \circ T = T$, luego $\operatorname{Im}(T) \subseteq \{w \in \mathbb{V} : T(w) = w\}$, y como $\{w \in \mathbb{V} : T(w) = w\} \subseteq \operatorname{Im}(T)$, resulta que

$$\operatorname{Im}(T) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = v\}. \tag{3}$$

De (3) resulta que

$$\operatorname{Im}(T) \cap \operatorname{Nu}(T) = \{0\}. \tag{4}$$

En efecto, si $v \in \operatorname{Im}(T) \cap \operatorname{Nu}(T)$, como $v = T(v)$ y $T(v) = 0$, se tiene que $v = 0$.

De (2) y (4) se concluye que $\mathbb{V} = \operatorname{Im}(T) \oplus \operatorname{Nu}(T)$. $\square$

---

2. Hallar todos los $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Resolución. [Referencia: ejercicio 12 - Práctica 4.]

Para empezar, analizamos la estructura geométrica de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda),$$

resulta que los autovalores de A son $0, 1$ y 3 y sus autoespacios asociados son, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\operatorname{nul}(A) &= \operatorname{nul}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \\
\operatorname{nul}(A - I) &= \operatorname{nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \\
\operatorname{nul}(A - 3I) &= \operatorname{nul}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, todo vector $x \in \mathbb{R}^3$ se escribe de manera única como

$$x = a_1\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + a_2\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T + a_3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. De acá resulta que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$A^k x = a_2\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T + a_3 3^k\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

y en consecuencia la sucesión $\left(A^k x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente si, y sólo si, $a_3 = 0$, y en tal caso

$$\lim_{k\to\infty} A^k x = a_2\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Poniendo $a_2 = 2$, se concluye que

$$\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}.$$

□

---

3. Encontrar los puntos de la curva $C = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 73x_1^2 - 72x_1x_2 + 52x_2^2 = 100\right\}$ más cercanos y más lejanos al origen e **indicar** su distancia al mismo.

Resolución. [Referencia: ejercicio 19 (c) -Práctica 5.]

La curva C es el conjunto de nivel 1 de la forma cuadrática $Q(x) = x^T A x$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 73/100 & -36/100 \\ -36/100 & 52/100 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathrm{tr}(A) = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$ y $\det(A) = \frac{73}{100} \cdot \frac{52}{100} - \left(\frac{36}{100}\right)^2 = \frac{2500}{10000} = \frac{1}{4}$, el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4}$ y sus raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. La simetría de la matriz A implica que $\mathrm{nul}(A - I) \perp \mathrm{nul}\left(A - \frac{1}{4}I\right)$ y como

$$\mathrm{nul}(A - I) = \mathrm{nul}\begin{bmatrix} -27/100 & -36/100 \\ -36/100 & -48/100 \end{bmatrix} = \mathrm{nul}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}\right\},$$

se deduce que $\mathrm{nul}\left(A - \frac{1}{4}I\right) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}^T\right\}$.

Del análisis precedente se puede ver que, si se elige el sistema de coordenadas cartesianas, $y = [x]_{\mathcal{B}}$, determinado por la base ortonormal $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}^T\right\}$, la ecuación $x^T A x = 1$ se reduce a la ecuación $y^T \Lambda y = 1$, donde $\Lambda = \mathrm{diag}(1, 1/4)$. Esto significa que la curva C es una elipse cuya ecuación canónica es $y_1^2 + \frac{y_2^2}{4} = 1$.

De acá resulta que

- los puntos de la elipse C más cercanos al origen son los vértices de la misma localizados en su eje menor, $[x_m^{\pm}]_{\mathcal{B}} = \pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, y la distancia de los mismos al origen es 1,
- los puntos de la elipse C más lejanos del origen son los vértices de la misma localizados en su eje mayor, $[x_M^{\pm}]_{\mathcal{B}} = \pm\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T$, y la distancia de los mismos al origen es 2.

En otras palabras,

$$\arg\min_{x \in C} \|x - 0\| = \left\{\begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad \min_{x \in C} \|x - 0\| = 1,$$
$$\arg\max_{x \in C} \|x - 0\| = \left\{\begin{bmatrix} 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6/5 \\ -8/5 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad \max_{x \in C} \|x - 0\| = 2.$$

□

---

4. Sabiendo que $y \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ soluciona la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + (\omega^2 + 1)y = 2e^{-t}\cos(\omega t),$$

donde $\omega > 0$, **calcular** $\lim_{t \to +\infty} y(t)$.

Resolución. [Referencia: ejercicios 1 (e), 4 y 5 - Práctica 6.]

Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $L(y) := y'' + 2y' + (\omega^2 + 1)y$ y sea $\mathrm{Nu}(L) = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : L(y) = 0\}$ su núcleo. Se sabe que las soluciones de la ecuación

$$L(y) = 2e^{-t}\cos(\omega t) \tag{1}$$

tienen la forma

$$y = y_0 + y_p, \tag{2}$$

donde $y_0 \in \mathrm{Nu}(L)$ e $y_p \in C^\infty(\mathbb{R})$ es cualquier solución particular de la ecuación (1).

Como $L = D^2 + 2D + (\omega^2+1)I$, donde $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ es el operador de derivación, y $\lambda^\pm = \frac{-2\pm\sqrt{4-4(\omega^2+1)}}{2} = -1 \pm i\,\omega$ son las raíces del polinomio $\lambda^2 + 2\lambda + (\omega^2+1)$, se sabe que el conjunto $\left\{e^{-t}\cos(\omega t), e^{-t}\operatorname{sen}(\omega t)\right\}$ es una base de $\operatorname{Nu}(L)$. Consecuentemente,

$$y_0(t) = e^{-t}\left(a_1\cos(\omega t) + a_2\operatorname{sen}(\omega t)\right), \tag{3}$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

De acuerdo con el *método de los coeficientes indeterminados* también se sabe que la ecuación (1) tiene una solución particular de la forma

$$y_p(t) = te^{-t}\left(\alpha_p\cos(\omega t) + \beta_p\operatorname{sen}(\omega t)\right), \tag{4}$$

donde $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$.

De (2), (3) y (4) se deduce que cualquier solución de la ecuación (1) tiene la forma

$$y(t) = e^{-t}\left(a_1\cos(\omega t) + a_2\operatorname{sen}(\omega t)\right) + te^{-t}\left(\alpha_p\cos(\omega t) + \beta_p\operatorname{sen}(\omega t)\right),$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Recordando que $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ y que las funciones $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$ son acotadas se concluye que

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

$\square$

---

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz tal que $\operatorname{tr}(A) = 5$ y $\det(A) = 6$, y sea X la solución del problema $X' = AX$ que satisface $X(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ y $X'(0) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$. **Hallar** $X(\ln(10))$.

Resolución. [Referencia: ejercicios 6 y 11 - Práctica 6.]

Se sabe que el polinomio característico de $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

De aquí que $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\} = \{2, 3\}$. Por lo tanto, existe una base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $Av_1 = 2v_1$ y $Av_2 = 3v_2$. De este primer análisis se deduce que toda solución X del problema $X' = AX$ es de la forma

$$X(t) = a_1e^{2t}v_1 + a_2e^{3t}v_2$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Debido a que $X(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ y $X'(0) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$, los vectores a_1v_1, a_2v_2 satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1v_1 + a_2v_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T, \\ 2a_1v_1 + 3a_2v_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T, \end{cases}$$

cuya solución es $a_1v_1 = \begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}^T, a_2v_2 = \begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}^T$. En consecuencia, *la solución del problema $X' = AX$ tal que $X(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ y $X'(0) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$, es*

$$X(t) = e^{2t}\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}^T + e^{3t}\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}^T.$$

Por lo tanto, $X(\ln(10)) = 10^2\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}^T + 10^3\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-1700 & -800\end{bmatrix}^T$. $\square$

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora (Tema 2) — Segundo cuatrimestre – 2019

Duración: 3 horas. — 26/II/20 – 14:00 hs.

Aclaración. En lo que sigue se presentan algunas de las posibles resoluciones de los problemas correspondientes a esta evaluación integradora. Es posible que se haya cometido algún error material involuntario, en tal caso se solicita del lector que lo corrija y que siga adelante.

---

1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. **Demostrar** que $\mathbb{V} = \operatorname{Im}(T) \oplus \operatorname{Nu}(T)$.

Resolución. [Referencia: ejercicio 20 - Práctica 2.]

Decir que $T \circ T = T$ es equivalente a decir que $T \circ (I_{\mathbb{V}} - T) = 0_{\mathbb{V}}$, de donde resulta que

$$\operatorname{Im}(I_{\mathbb{V}} - T) \subseteq \operatorname{Nu}(T). \tag{1}$$

Observando que todo $v \in \mathbb{V}$ se puede escribir en la forma $v = T(v) + (v - T(v))$ se deduce que

$$\mathbb{V} = \operatorname{Im}(T) + \operatorname{Nu}(T) \tag{2}$$

porque donde $T(v) \in \operatorname{Im}(T)$ y, de acuerdo con (1), $v - T(v) \in \operatorname{Nu}(T)$.

Si $w \in \operatorname{Im}(T)$, esto significa que existe un $v \in \mathbb{V}$ tal que $w = T(v)$. Entonces $T(w) = T(T(v)) = T(v) = w$ porque $T \circ T = T$, luego $\operatorname{Im}(T) \subseteq \{w \in \mathbb{V} : T(w) = w\}$, y como $\{w \in \mathbb{V} : T(w) = w\} \subseteq \operatorname{Im}(T)$, resulta que

$$\operatorname{Im}(T) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = v\}. \tag{3}$$

De (3) resulta que

$$\operatorname{Im}(T) \cap \operatorname{Nu}(T) = \{0\}. \tag{4}$$

En efecto, si $v \in \operatorname{Im}(T) \cap \operatorname{Nu}(T)$, como $v = T(v)$ y $T(v) = 0$, se tiene que $v = 0$.

De (2) y (4) se concluye que $\mathbb{V} = \operatorname{Im}(T) \oplus \operatorname{Nu}(T)$. $\square$

---

2. Hallar todos los $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\lim\limits_{k\to\infty} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Resolución. [Referencia: ejercicio 12 - Práctica 4.]

Para empezar, analizamos la estructura geométrica de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda \left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda),$$

resulta que los autovalores de A son $0, 1$ y 3 y sus autoespacios asociados son, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\operatorname{nul}(A) &= \operatorname{nul} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \\
\operatorname{nul}(A - I) &= \operatorname{nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \\
\operatorname{nul}(A - 3I) &= \operatorname{nul} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, todo vector $x \in \mathbb{R}^3$ se escribe de manera única como

$$x = a_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + a_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T + a_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. De acá resulta que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$A^k x = a_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T + a_3 3^k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

y en consecuencia la sucesión $\left(A^k x\right)_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente si, y sólo si, $a_3 = 0$, y en tal caso

$$\lim_{k \to \infty} A^k x = a_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Poniendo $a_2 = -2$, se concluye que

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k \to \infty} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

---

3. Encontrar los puntos de la curva $C = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 52x_1^2 - 72x_1x_2 + 73x_2^2 = 100 \right\}$ más cercanos y más lejanos al origen e **indicar** su distancia al mismo.

Resolución. [Referencia: ejercicio 19 (c) -Práctica 5.]

La curva C es el conjunto de nivel 1 de la forma cuadrática $Q(x) = x^T A x$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 52/100 & -36/100 \\ -36/100 & 73/100 \end{bmatrix}.$$

Como $\operatorname{tr}(A) = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$ y $\det(A) = \frac{52}{100} \cdot \frac{73}{100} - \left(\frac{36}{100}\right)^2 = \frac{2500}{10000} = \frac{1}{4}$, el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4}$ y sus raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. La simetría de la matriz A implica que $\operatorname{nul}(A - I) \perp \operatorname{nul}\left(A - \frac{1}{4}I\right)$ y como

$$\operatorname{nul}(A - I) = \operatorname{nul}\begin{bmatrix} -48/100 & -36/100 \\ -36/100 & -27/100 \end{bmatrix} = \operatorname{nul}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}\right\},$$

se deduce que $\operatorname{nul}\left(A - \frac{1}{4}I\right) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}^T\right\}$.

Del análisis precedente se puede ver que, si se elige el sistema de coordenadas cartesianas, $y = [x]_{\mathcal{B}}$, determinado por la base ortonormal $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}^T\right\}$, la ecuación $x^T A x = 1$ se reduce a la ecuación $y^T \Lambda y = 1$, donde $\Lambda = \operatorname{diag}(1, 1/4)$. Esto significa que la curva C es una elipse cuya ecuación canónica es $y_1^2 + \frac{y_2^2}{4} = 1$.

De acá resulta que

- los puntos de la elipse C más cercanos al origen son los vértices de la misma localizados en su eje menor, $[x_m^{\pm}]_{\mathcal{B}} = \pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, y la distancia de los mismos al origen es 1,
- los puntos de la elipse C más lejanos del origen son los vértices de la misma localizados en su eje mayor, $[x_M^{\pm}]_{\mathcal{B}} = \pm\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T$, y la distancia de los mismos al origen es 2.

En otras palabras,

$$\arg\min_{x \in C} \|x - 0\| = \left\{\begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad \min_{x \in C} \|x - 0\| = 1,$$
$$\arg\max_{x \in C} \|x - 0\| = \left\{\begin{bmatrix} 8/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8/5 \\ -6/5 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad \max_{x \in C} \|x - 0\| = 2.$$

□

---

4. Sabiendo que $y \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ soluciona la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + (\omega^2 + 1)y = 2e^{-t}\operatorname{sen}(\omega t),$$

donde $\omega > 0$, **calcular** $\lim_{t \to +\infty} y(t)$.

Resolución. [Referencia: ejercicios 1 (e), 4 y 5 - Práctica 6.]

Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $L(y) := y'' + 2y' + (\omega^2 + 1)y$ y sea $\operatorname{Nu}(L) = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : L(y) = 0\}$ su núcleo. Se sabe que las soluciones de la ecuación

$$L(y) = 2e^{-t}\operatorname{sen}(\omega t) \tag{1}$$

tienen la forma

$$y = y_0 + y_p, \tag{2}$$

donde $y_0 \in \operatorname{Nu}(L)$ e $y_p \in C^\infty(\mathbb{R})$ es cualquier solución particular de la ecuación (1).

Como $L = D^2 + 2D + (\omega^2+1)I$, donde $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ es el operador de derivación, y $\lambda^\pm = \frac{-2\pm\sqrt{4-4(\omega^2+1)}}{2} = -1 \pm i\,\omega$ son las raíces del polinomio $\lambda^2 + 2\lambda + (\omega^2+1)$, se sabe que el conjunto $\left\{e^{-t}\cos(\omega t), e^{-t}\operatorname{sen}(\omega t)\right\}$ es una base de $\operatorname{Nu}(L)$. Consecuentemente,

$$y_0(t) = e^{-t}\left(a_1\cos(\omega t) + a_2\operatorname{sen}(\omega t)\right), \tag{3}$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

De acuerdo con el *método de los coeficientes indeterminados* también se sabe que la ecuación (1) tiene una solución particular de la forma

$$y_p(t) = te^{-t}\left(\alpha_p\cos(\omega t) + \beta_p\operatorname{sen}(\omega t)\right), \tag{4}$$

donde $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$.

De (2), (3) y (4) se deduce que cualquier solución de la ecuación (1) tiene la forma

$$y(t) = e^{-t}\left(a_1\cos(\omega t) + a_2\operatorname{sen}(\omega t)\right) + te^{-t}\left(\alpha_p\cos(\omega t) + \beta_p\operatorname{sen}(\omega t)\right),$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Recordando que $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ y que las funciones $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$ son acotadas se concluye que

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

$\square$

---

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz tal que $\operatorname{tr}(A) = 5$ y $\det(A) = 6$, y sea X la solución del problema $X' = AX$ que satisface $X(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ y $X'(0) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$. **Hallar** $X(\ln(10))$.

Resolución. [Referencia: ejercicios 6 y 11 - Práctica 6.]

Se sabe que el polinomio característico de $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

De aquí que $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\} = \{2, 3\}$. Por lo tanto, existe una base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $Av_1 = 2v_1$ y $Av_2 = 3v_2$. De este primer análisis se deduce que toda solución X del problema $X' = AX$ es de la forma

$$X(t) = a_1e^{2t}v_1 + a_2e^{3t}v_2$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Debido a que $X(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ y $X'(0) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$, los vectores a_1v_1, a_2v_2 satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1v_1 + a_2v_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T, \\ 2a_1v_1 + 3a_2v_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T, \end{cases}$$

cuya solución es $a_1v_1 = \begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}^T, a_2v_2 = \begin{bmatrix}-1 & -2\end{bmatrix}^T$. En consecuencia, *la solución del problema $X' = AX$ tal que $X(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ y $X'(0) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$, es*

$$X(t) = e^{2t}\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}^T + e^{3t}\begin{bmatrix}-1 & -2\end{bmatrix}^T.$$

Por lo tanto, $X(\ln(10)) = 10^2\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}^T + 10^3\begin{bmatrix}-1 & -2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-800 & -1700\end{bmatrix}^T$. $\square$